Prof. M Fethi	Série d'exercices Suite réelle	2012/2013

Exercice n°1 :

1) Montrer que $\forall\ x; y\ \in IR$ on a : $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$
2) Soit la suite (S_n) définie sur IN par : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots\dots\dots + \frac{1}{3}$

On se propose de démontrer que la suite (S_n) n'est pas convergente.

a) Montrer que $\forall\ n\ \in IN^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \le \log(n+1) - \log n \le \frac{1}{n}$
   (Indication : on pourra utiliser le théorème des accroissements finis)
b) En déduire que $\forall\ n\ \in IN^*$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots\dots\dots + \frac{1}{n} \le \log(n+1) \le S_n$
c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

Exercice n°2 :

Soient $a, b\ \in IR$ tel que : $0 < a < b$

On considère les suites : (a_n) et (b_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} a_n = a \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que (a_n) et (b_n) sont bien définis sur IN.
2) Montrer que $\forall\ n \in IN^*$ on a : $a_n \le b_n$
3) Montrer que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.
4) En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

Exercice n°3 :

Soit (u_n) la suite définie bar : $\begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - u_n}{2}} \end{cases}$

1) a) Montrer que la suite (u_n) existe si et seulement si $u_0 \in [-1,1]$
   b) Déterminer u_0 de telle sorte (u_n) soit constante.
2) Dans la suite, on posera $u_0 = \sin \alpha_0$ avec $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
   a) Justifier ce choix. Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?
   b) Etablir l'égalité : $\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$
   c) Etablir que $\forall\ n\ \in IN$; il existe α_n unique ; $\alpha_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_n = \sin \alpha_n$.
   Quelle rotation y-a-t-il entre α_n et α_{n+1}

d) On considère la suite (β_n) de terme générale $\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$
Montrer que (β_n) est une suite géométrique.
En déduire α_n puis u_n en fonction n et u_0.
La suite (u_n) a-t-elle une limite ? si oui, la calculer.

Exercice n°4 :

Etant donné deux nombres complexes a et b telques , $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$,

on definit la suite$(Z_n)_{n \in IN}$ par :

$Z_0 = 0$ et, pour tout $n \in IN$; $Z_{n+1} = aZ_n + b$

dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on notera M_n

le point d'affixe Z_n

1°/ Montrer par recurrence que , pour $n \geq 1$ on a : $Z_n = \dfrac{b(1-a^n)}{1-a}$

2°/ Soit $P \in IN; P \geq 2$ on pose dans cette question :

$$a = \cos\frac{2\pi}{P} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in IN}$ est periodique de periode p.

3°/ α étant un réel donné, $\alpha \neq k\pi, k \in z$ on pose dans cette question :

$$a = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$
$$b = 2\sin\alpha$$

Soit $\begin{aligned} & g: P \to P \\ & M(Z) \to M'(Z') \; ; \; Z' = az + b \end{aligned}$

ou P designe le plan complexe rapport é à $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

a- Donner la nature de l'application g .

b-Deduire que M_n est inclus dans un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

c- Faire une figure pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 dans ce cas particulier .

Exercice n°5 :

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ une suite convergente de limite nulle et (V_n) une suite telle que l'on ait

$\forall$ n $\in$ IN, $|V_n| \prec |U_n|$

1°/ Montrer que (V_n) est convergente vers 0

2°/a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN*, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b- Deduire que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ definit par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

est convergente

c- Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3°/ Demontrer que la suite $(V_n)_{n\in IN^*}$ definie par $\forall$ n $\in$ IN*, $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

4°/Soit α un entier superieur à 2 demontrer que la suite $(W_n)_{n\in IN^*}$ definie

par $\forall$ n $\in$ IN*, $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$ est convergente

Exercice n°6 :

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repere orthonormal $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ on definit l'application f qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' definit par

$Z' = -jz + i$ ou $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1- Montrer que f admet exactement un point invariant Ω, dont on donnera l'affixe

2- Caracteriser geometriquement f

3- On definit dans $\mathcal{P}$ la suite $(M_n)_{n\in IN}$ par $\begin{cases} M_0 = 0 \\ \forall \text{ n} \in \text{IN} ; M_{n+1} = f(M_n) \end{cases}$

a-Construire Ω ; M_0, M_1, M_2

b- Pour tout $n \in$ IN, on note Z_n l'affixe de M_n on pose $t_n = z_n - e^{\frac{i\pi}{6}}$

determiner un nombre complexe a tel que $\forall$ n $\in$ IN, $t_{n+1} = a\, t_n$ mettre a sous forme trigonometrique et determiner un entier naturel k tel que $a^k = 1$

c- Calculer t_n puis Z_n en fonction de n

d- Calculer Z_{1989} et placer M_{1999} sur le dessin.

Exercice n°7 :

1°/Soit (U_n) la suite definie par $\begin{cases} U_0 = 1,\ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{5}{4}U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$

et (V_n) par $V_n = U_{n+1} - U_n$

a- Montrer que la suite (V_n) est une suite geometrique convergente

b- Calculer U_n en fonction de n . On deduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$

2°/On definit la suite (W_n) sur IN par $W_n = (2n+1)\, V_n$

a- Montrer que (W_n) est décroissante et qu'elle converge .

b- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{1}{4} W_n + \frac{1}{2} V_n$

puis calculer $\lim_{n \to +\infty} W_n$

3°/Soit la suite (S_n) definie sur IN par $S_n = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$

a- Montrer que $S_n - \frac{1}{4} S_n = 1 - \frac{1}{4} W_n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} V_k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

b- En deduire que (S_n) est convergente et calculer sa limite

---

[i] 40639912